Universidad Autónoma de Entre Ríos.

Facultad de Ciencia y Tecnología.

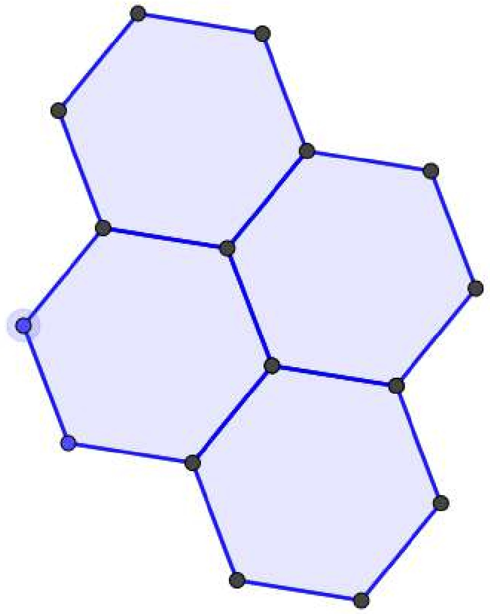
Sede Concepción del Uruguay.

Especialización en Educación Científica.

Trabajo Final Integrador:

<<La Matemática de las Abejas>>.

.



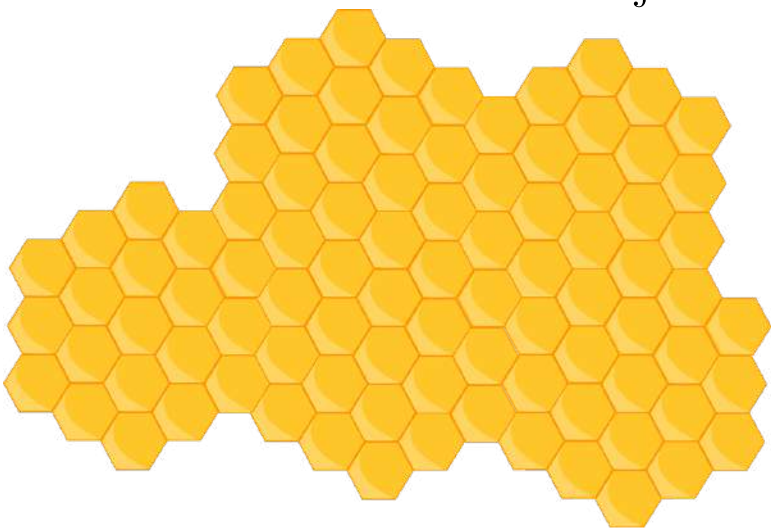
Estudiante: Paulo Alejandro Pascal.

DNI.: 35.102.376.

Especialidad: Matemática.

Año: 2018.

La Matemática de las abejas.



Trabajo Final Integrador.

Paulo A. Pascal.

2018.

Introducción.

El docente de Matemáticas en la escuela secundaria se encuentra atravesado por distintas situaciones que hacen que se modifiquen sus prácticas: el acceso a recursos bibliográficos-tecnológicos, la premura por completar los contenidos curriculares, cursos con un gran número de estudiantes y otras tantas cuestiones que hacen que «Matemática» se vuelva una asignatura cargada de lo que Chevallard, Bosch & Gascón (1997) llaman «enfermedad didáctica»; es decir, que sólo tiene sentido dentro del ámbito escolar. Para poder palear en parte esta situación y para completar el trayecto de la **Especialización en Educación Científica** de la Universidad Autónoma de Entre Ríos (FCyT C. del U.), se presenta el siguente trabajo. En el mismo se procura efectuar una lectura del Diseño Curricular de la Provincia de Entre Ríos con la posterior generación de una secuencia que, respetando lo sugerido por el Diseño, permita al docente acercar a los estudiantes un problema que pasó por la mente de varios matemáticos a lo largo de la historia: La Conjetura del Panal de abejas (**The honeycomb conjecture**). Actualmente Teorema, gracias a los trabajos de Thomas Hales, tiene un enunciado que afirma que la disposición hexagonal es la forma óptima para rellenar un plano, si de polígonos regulares se trata. La demostración formal de este teorema excede por mucho los marcos de la enseñanza media. No obstante, a través del uso de teselaciones, aritmética y álgebra sencilla se puede visualizar que, comparado con los demás polígonos regulares equivalentes, el hexágono minimiza el perímetro.

Banet Hernández (2010), recuperando el pensamiento de Dewey, señala que en la escuela se introducen definiciones y leyes a edades tempranas con unas pocas indicaciones sobre el modo en que se ha llegado a ellas; y que los alumnos aprenden una «ciencia» en vez de aprender el modo científico de tratar la experiencia ordinaria. Si bien la actividad no recupera fielmente métodos usados por matemáticos, está estructurada en base a conocimientos previos de los estudiantes que pueden ser usados en la construcción de una solución para un problema planteado, dotando así de un significado al contenido aprendido.

Objetivos de este trabajo:

- Efectuar una lectura del Diseño Curricular de la Provincia de Entre Ríos a fin de identificar contenidos mínimos y estrategias propuestas para la asignatura «Matemática».
- Recuperar contenidos y bibliografía utilizada en los distintos seminarios de la Especialización en Educación Científica.
- Proponer una secuencia didáctica que permita recuperar saberes de la trayectoria académica de los estudiantes, promoviendo una visión **menos fragmentada de la asignatura.**

Primera parte: Cuestiones teóricas y metodológicas.

Sobre la elección de los contenidos curriculares.

Como este trabajo está pensado para las aulas de la Provincia de Entre Ríos, es necesario señalar que existe un documento (en dos tomos) llamado «Diseño Curricular de Educación Secundaria»[1] gestado por el Consejo General de Educación de la Provincia (**CGE**), que delinea los contenidos mínimos y sugiere ciertas prácticas para la enseñanza de los mismos. Los responsables de su escritura son expertos de la Comisión para la Organización Curricular de Educación Secundaria.

Conocida esta cuestión, conviene recuperar lo que dice Chevalard (citado por Gascón, 2003) con respecto a la elección de los contenidos que aparecen en las currículas: existe una jerarquía de niveles de codeterminación, dada de la siguiente manera:

Sociedad → Escuela → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Según Chevallard (citado por Gascón, 2003) se observa un *abandono*, por parte del profesor, de los niveles superiores de organización didáctica, desde el de la sociedad y la escuela hasta incluso el de los sectores, lo que provoca un retraimiento de su acción sobre el nivel de los temas.

O sea, existe poco margen para que los docentes actúen de forma significativa. Con respecto a esto Gascón (2003) asegura que este «encierro en los temas» constituye un fenómeno didáctico, el «autismo temático» del profesor (término poco feliz), relacionado con el estatus del oficio de profesor, considerado culturalmente como un oficio de bajo nivel.

[1] Aprobado por resolución 3322/10 CGE.

A pesar de esto, se debe reconocer que el Diseño Curricular de Educación Secundaria de la Provincia de Entre Ríos estructura la asignatura «Matemática» en base a cuatro **recorridos posibles**, que dan lugar a la intervención creativa de los docentes:

- Entre incógnitas y variables: el poder modelizador de las fórmulas algebraicas y de aquellas que trascienden el campo del álgebra expresa la relación de dependencia entre cantidades de magnitud.
- El estudio de las figuras y las medidas: campo propicio para interactuar con una multiplicidad de conceptos.
- Contribución al pensamiento estadístico y probabilístico para la formación de una cultura científica.
- Contribución del conocimiento de los números a la formación de un pensamiento acorde a los desafíos de esta época.

Se puede leer en el mismo: «Recorridos se asocian a una propuesta más lábil, flexible, ofrece diversidad de posibilidades para el abordaje de contenidos desde nuevos enfoques, permiten pensar nuevas dinámicas y movimientos»; y agrega que se proponen sugerencias para el trabajo «sin que ello ponga en cuestión la autonomía docente ni institucional» (CGE, 2011).

Algunas estrategias.

Galagovsky (2004) define el «Aprendizaje sustentable» como «aquel que surge al vincular una información como nuevo conocimiento relacionado con conceptos sostén [2] correctos, ya existentes en la estructura cognitiva del alumno». Además agrega que «Durante la apropiación de la información, el sujeto debe buscar, seleccionar, confrontar, encontrar entre todos los conceptos inclusores accesibles a su mente consciente, [...] aquellos conceptos sostén que sean apropiados. [...] El docente tendrá que afinar sus propuestas de

[2] "La diferencia teórica fundamental entre un concepto inclusor (propuesto por Ausubel en 1968) y un concepto sostén radica en que el primero puede no ser un nexo correcto; mientras que el segundo, deberá serlo" (Galagovky, 2004).

actividades para generar espacios de clase que permitan dicha toma de conciencia, la autoevaluación y el análisis metacognitivo de los alumnos. Se recomienda generar en la clase un buen clima afectivo donde se fomente la confianza en sí mismo, no se automarginen explicitaciones o argumentaciones por temor al ridículo y se ayude a tomar conciencia sobre los errores» (Galagovsky, 2004).

Entonces, para dar unos pasos en esta dirección se propone una actividad que busca generar un conflicto ; y que permita que los estudiantes, haciendo uso de las herramientas matemáticas aprendidas en ciclos anteriores, elaboren argumentos y justificaciones; dando lugar al error como herrmienta de aprendizaje.

Es posible que, como dice Galagovsky en su libro «Hacia un nuevo rol docente», «el conflicto que resultara significativo para el docente según su propia estructura cognitiva, resulte para los alumnos algo ajeno a ellos, a sus intereses, y a veces ni siquiera representa un conflicto». Es por eso que, atendiendo a la recomendación de la autora, se plantea una «actividad donde distintos grupos de alumnos arriben a distintas concusiones sobre un mismo tema» (Galagovsky, 1993). Con un máximo de cuatro estudiantes, se espera que un debate tenga lugar, asegurando así la presencia de conflicto.

Contenidos previos.

Los siguientes son contenidos que se supone deben conocer los estudiantes para poder abordar el problema que involucra la secuencia. Son conceptos que oficiarán de «andamio» en la construcción de las argumentaciones:

- Noción de polígono (regular e irregular).
- Conceptos de área y perímetro de polígonos.
- Divisibilidad de números enteros.
- Cantidades irracionales (y aproximaciones racionales).

A continuación se identifican los mismos (con negrita) en los recorridos de algunos cursos de la Escuela Secundaria Entrerriana:

Recorrido: **Contribución del conocimiento de los números a la formación de un pensamiento acorde a los desafíos de esta época.**

- 1º Año:

  El tratamiento de los números implica la necesidad de poner en juego las reglas de formación del sistema de numeración decimal, analizándolo y comparándolo con otros sistemas. La interpretación y uso de los números naturales, relaciones de orden, operaciones básicas y sus propiedades, cuadrados y cubos, raíces cuadradas exactas de números naturales, potencias de base 10, escritura polinómica, **divisibilidad**. La necesidad de utilizar expresiones fraccionarias y decimales finitas para comprender, trabajar y expresar diversas situaciones. Distintas representaciones y usos de dichas expresiones (gráfca, equivalencias, porcentaje, escala, etc.) Introducción a los números enteros. Ocasiones de uso, representación en la recta, distancia entre dos números. Situaciones de suma y resta. Las distintas representaciones numéricas (expresiones enteras y racionales positivas, puntos en la recta, descomposición polinómica, etc.) reconociendo la equivalencia entre ellas.

Recorrido: **El estudio de las figuras y las medidas: campo propicio para interactuar con una multiplicidad de conceptos.**

- 1º Año:

  Caracterización y clasificación de triángulos, cuadriláteros, círculos, poliedros y cuerpos redondos. Exploración de las condiciones necesarias para que la construcción de una figura sea posible, analizando en qué casos la solución es única, en qué casos se obtienen infinitas soluciones y en qué casos es imposible. Validación de propiedades (propiedad triangular, ángulos adyacentes y opuestos por el vértice, suma de ángulos interiores en triángulos y cuadriláteros). **Análisis y uso de las nociones de perímetro, área y volumen.** Resolución y formulación de problemas que involucren distintas unidades de medida (longitud, capacidad, masa, tiempo).

- 2º Año:
  El estudio de algunas figuras en el plano desde la noción de lugar geométrico (circunferencia, círculo, mediatriz, bisectriz). Las condiciones necesarias y sufcientes para determinar la congruencia de triángulos. Avanzar sobre las propiedades de los paralelogramos en una relación bidireccional con la construcción de polígonos con regla no graduada y compás. Los ángulos adyacentes, opuestos por el vértice y ángulos entre paralelas y sus relaciones y propiedades. **La equivalencia de áreas en distintas figuras y las relaciones que se establecen (o no) entre cuerpos con igual área y distinto volumen.** El Teorema de Pitágoras, una relación que se da entre los lados de un triángulo rectángulo y que tiene múltiples aplicaciones en variados contextos.

- 3º Año:
  La semejanza de triángulos y de otras figuras. Las condiciones necesarias y las relaciones que se establecen entre aquellas. Las condiciones de aplicación del Teorema de Thales y la proporcionalidad entre segmentos que se deriva de éste. **Las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) para resolver problemas con triángulos rectángulos.** [3]

El Diseño Curricular además, como se indicó anteriormente, contempla algunas **sugerencias**. En el caso del apartado de 4º Año se puede leer que «es necesario ampliar y profundizar los conocimientos que los estudiantes tienen acerca de figuras y cuerpos geométricos. A tales efectos, es posible retomar algunas construcciones y extenderlas a los poliedros regulares y cuerpos redondos, de manera de establecer vínculos entre conceptos geométricos, modelizaciones algebraicas, números irracionales y los conocimientos de trigonometría que los estudiantes poseen». Así, se vuelve posible llevar esta actividad al aula de **4º año de la Educación Secundaria**.
Además, con referencia a los números irracionales: «Las situaciones de enseñanza deberían posibilitar o promover una sucesión de acciones de modo de poder identifcar y usar las

[3]Este bloque no es estrictamente necesario, pero si los estudiantes lo conocen el trabajo puede ser mucho más interesante (en las páginas siguientes se verá por qué).

propiedades de este conjunto numérico, [...]. Es preciso plantear actividades que permitan el trabajo en relación con otros conceptos» (CGE, 2011).

Sobre el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación.

¿Por qué usar TIC para enseñar Matemática?. Juan Francisco Mañas Mañas (2013) enumera algunos estudios que justifican el uso de TIC en el aula de Matemática.

- Hollebrands (2003), Sanclair y Yurita (2008) realizan investigaciones de cómo las TIC hace mejorar las conjeturas y los razonamientos dados por los alumnos hacia cualquier problema.
- Santos-Trigo (2008) realiza investigaciones sobre como las TIC mejora la competencia de resolución de problemas.
- Alemán de Sánchez (2002) señala las ventajas teóricas del uso de las TIC en las matemáticas.
- Sánchez (2001) Señala las ventajas del software en geometría dinámica.
- Artigue (2002) y Noss (2002) describen el impacto positivo que el uso de las TIC produce en los estudiantes. (Mañas Mañas, 2013).

Aquí se propondrá el uso del Software GeoGebra desde móviles y computadoras, pero es necesario aclarar que se tendrán ciertos reparos. En su libro «Currículum XXI» Heidi Hayes Jacob (2014) discrimina los compromisos del docente al respecto:
Lo que no es compromiso:

- Utilizar un proyector LCD frente a un retroproyector.
- Utilizar un ordenador frente a una máquina de escribir.
- Utilizar una pizarra interactiva frente a un proyector LCD.

Lo que sí es compromiso:

- Un uso integrado de la tecnología que refuerza el contenido.
- **La aplicación a una unidad concreta de estudio**
- Evidencias directas en productos y actuaciones del estudiante.(Hayes Jacob, 2014).

Además, recuperando los «criterios para valorar la pertinencia y significatividad del uso de TIC para resolver consignas matemáticas» planteados por Rodriguez et al (2016).

- **Criterio 1**: Favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas: Este criterio se refiere a que el trabajo con las TIC debe generar una genuina búsqueda de pruebas, es decir que lo que la computadora o el software arrojen invite al estudiante a encontrar razones de por qué es válido lo que encontró.

- **Criterio 2**: Imprescindibilidad de las TIC: [...] lo matemático que se pone en juego cuando utilizamos TIC no aparece si no usamos las nuevas tecnologías.

- **Criterio 3**: No perder de vista el objetivo matemático: no debe ocurrir que se esté enseñando el recurso tecnológico.

- **Criterio 4**: Incluir distintos usos de TIC: [...] a) utilización de algún software matemático; b) [...] chat, foros, redes sociales [...], presentaciones, etcétera; c) uso de internet para búsqueda de información.

- **Criterio 5**: Complementariedad: [...] ver si el uso de TIC es un recurso más, en el sentido de que no debería reemplazar otras formas de trabajo en clase. [...] No resultaría pertinente que, cualquiera sea el contenido a enseñar, en todas las consignas se proponga el uso de TIC.

- **Criterio 6**: Libertad para apelar a las TIC: el estudiante debería poder decidir si para resolver la consigna le es útil o no usar TIC.

- **Criterio 7**: Libertad de selección de cuál recurso tecnológico utilizar: debería poder seleccionarse autónomamente qué programa utilizar o dónde buscar bibliografía. (Rodriguez et al, 2016).

Epistemológicamente hablando...

Fernández et.al. (2002) recuperan en una revisión bibliográfica algunas **visiones deformadas de la actividad científica**. Se trata de ciertas concepciones que ponen «palos en la rueda» en el desarrollo de la enseñanza científica:

- **Una concepción empiroinductivista y ateórica**: una concepción que resalta el papel de la observación y de la experimentación «neutras» (no contaminadas por ideas apriorísticas), e incluso del puro azar, olvidando el papel esencial de las hipótesis como focalizadoras de la investigación y de los cuerpos coherentes de conocimientos (teorías) disponibles, que orientan todo el proceso.
- **Una concepción rígida de la actividad científica**: se presenta el «método científico» como un conjunto de etapas a seguir mecánicamente. Se resalta, por otra parte, lo que supone tratamiento cuantitativo, control riguroso, etc., olvidando –o, incluso, rechazando– todo lo que significa invención, creatividad, duda...
- **Una concepción exclusivamente analítica**: resalta la necesaria parcelación inicial de los estudios, su carácter acotado, simplificatorio, pero que olvida los esfuerzos posteriores de unificación y de construcción de cuerpos coherentes de conocimientos cada vez más amplios o el tratamiento de problemas «puente» entre distintos campos de conocimiento que pueden llegar a unirse, como ha ocurrido tantas veces.

- **Una concepción meramente acumulativa del desarrollo científico**: el desarrollo científico aparece como fruto de un crecimiento lineal, puramente acumulativo ignorando las crisis y las remodelaciones profundas, fruto de procesos complejos que no se dejan ahormar por ningún modelo definido de cambio científico.

- **Una concepción individualista y elitista de la ciencia**: los conocimientos científicos aparecen como obra de genios aislados, ignorándose el papel del trabajo colectivo, de los intercambios entre equipos. En particular se deja creer que los resultados obtenidos por un sólo científico o equipo pueden bastar para verificar o falsar una hipótesis o, incluso, toda una teoría.

- **Una visión descontextualizada, socialmente neutra de la actividad científica**: trata muy superficialmente, las complejas relaciones CTS, Ciencia-Tecnología-Sociedad.

Furió et. al.(2001) comentan al respecto que al no tener los docentes una buena participación en la construcción de la currícula (Currículos line-expert) se «termina transmitiendo una visión empobrecida de la ciencia centrada en los contenidos conceptuales». (Furió et. al. 2001). Esto hace que se sientan preocupados por el nivel con que los estudiantes llegan a sus clases y por enseñar en función del curso siguiente. Por tanto, «se asumiría el papel de *seleccionador de estudiantes* al pensar que la ciencia es algo difícil, que no todos los estudiantes pueden comprender o dominar, sino sólo aquéllos que tienen unas cualidades determinadas, contribuyendo así a la **visión elitista de la ciencia**». (Furió et. al. 2001).

Como Matemática es una ciencia formal, se torna difícil presentar batalla a todas las concepciones en una sóla actividad (Sobre todo a la que incluye el «Método Científico»). No obstante, se busca con la secuencia incentivar el **trabajo colaborativo** con **posterior debate** para la resolución de un **problema verosímil y cercano a los estudiantes** a fin de hacerle frente a la **visión elitista**. Además, la introducción de un **marco histórico** puede contribuir a **contextualizar** el contenido.

Registros semióticos.

Jesus Macías Sanchez (2014) recupera la definición de Raymond Duval de representación semiótica como «la producción constituida por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento». Luego especifica algunos registros que tienen lugar en la enseñanza de la Matemática:

- **Registro de la lengua natural (o materna)**: permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones.
- **Registro numérico**: permite realizar operaciones de cálculo y aplicar propiedades como pueden ser la distributiva, conmutativa, etc. necesarias para la resolución de diversas tareas.
- **Registro figural - icónico**: engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.
- **Registro Tabular**: los datos se presentan a través de un conjunto de filas y de columnas permitiendo visualizar la información de manera global.
- **Registro Algebráico**: Permiten realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa.
- **Registro Geométrico**: admite operaciones de reconfiguración y manipulación que facilitan la comprensión y el establecimiento de conexiones entre diferentes objetos.
- **Registro Gráfico**: la representación gráfica-cartesiana (u otras) hace patentes diversos elementos (puntos de corte con los ejes, ejes de simetría, posición en el plano, curvatura, etc.) que permiten apreciar el papel de los parámetros.

La actividad propuesta permite al estudiante trabajar con varios registros y lo que es mejor, transformar de un registro a otro, a fin de poder salvar las limitaciones de cada uno por separado.

Segunda parte: Unidad didáctica.

Camuyrano et al (1998) presentan un problema que titulan «El embaldosado del plano por polígonos regulares». El mismo plantea un trabajo de teselado con polígonos regulares. Siguiendo esa línea, se puede presentar a los estudiantes la siguiente situación ficticia (pero verosímil):

El colegio recibe donado un rollo de adhesivo vinílico en forma rectangular para cubrir el piso de un aula. Algunos docentes y estudiantes se ofrecen para efectuar el pegado. Para evitar trabajar con la extensión del rollo, deciden cortar el mismo en forma de baldosas regulares y luego pegarlo. Ante la duda, piden asesoramiento acerca de qué figura geométrica permitirá realizar el trabajo de forma eficiente.
¿Qué figura recomendarían ustedes? ¿Por qué?

Objetivos generales:

- Reconocer la utilidad del trabajo matemático.
- Concientizar a los estudiantes acerca de la importacia de la educación formal secundaria, aportante de contenidos de difícil aprendizaje fuera de su ámbito.

Objetivos específicos:

- Conocer el concepto de teselación.
- Recuperar las nociones de divisor y número entero.
- Comparar polígonos atendiendo a su área y perímetro.
- Utilizar ecuaciones sencillas.
- Expresar resultados que involucren cantidades inconmensurables en forma exacta y aproximada.
- Introducir un marco histórico para el problema abordado.

Con preguntas como «¿habrá una figura mejor que el cuadrado para rellenar el piso» o «¿Por qué usar figuras regulares y no irregulares?» se pretende abrir el *filtro perceptivo* de los estudiantes para poder iniciar una búsqueda. Generar argumentos con distintos registros semióticos (Teoría de Duval) será de vital importancia para decantarse por alguna de las opciones posibles, intentando dar relevancia a criterios funcionales por sobre los estéticos.

Otras características: este trabajo comparte algunas características con intervenciones del tipo CTS: se busca poner el conocimiento como valor de uso y se pondera el debate como herramienta para la resolución de una situación controversial: ¿cuadrado sí o no?. Cabe destacar que la secuencia tiene lugar en un aula de secundaria, pero es posible migrarlos, *mutatis mutandis*, a contextos no formales.

También es importante reconocer que se ponen en juego habilidades cognitivas de alto orden, porque los involucrados deberán elaborar argumentos para justificar su elección.

¿Cambio de Concepción?

Posner et al. (1982) citado por Moreira & Greca (2003) mencionan que a pesar de que existan varias condiciones para el cambio conceptual, hay cuatro que parecen ser comunes en la mayoría de los casos:

- Debe existir una insatisfacción con las concepciones existentes. Es improbable que científicos y alumnos hagan cambios radicales en sus conceptos a menos que perciban que pequeñas mudanzas no funcionan más.
- Una nueva concepción debe ser inteligible. El individuo debe ser capaz de entender el nuevo concepto lo suficiente para explorar sus posibilidades.
- Una nueva concepción debe parecer inicialmente plausible. Cualquier nuevo concepto adoptado debe por lo menos parecer tener la capacidad de resolver los problemas generados por sus predecesores.
- Una nueva concepción debe sugerir la posibilidad de un programa de investigación fructífero. El nuevo concepto debe tener el potencial de ser extendido a otras áreas,

de abrir nuevas posibilidades. (Moreira & Greca, 2003).

Suponiendo que, por costumbre, la visión del estudiante sea que el cuadrado es el mejor polígono para rellenar un plano, la insatisfacción debería surgir de los interrogantes planteados en la actividad y por el mismo docente, o sea, que por lo menos parezca sospechoso el planteo y movilice a la actividad. Con respecto a la inteligibilidad y la plausibilidad no debería presentar mayores problemas que los que supone poner en juego otros polígonos. Por último, la idea del «programa de investigación fructífero» queda sujeta a las aplicaciones que puedan darle los estudiantes en su trayectoria escolar o en la vida cotidiana.

Cronograma Tentativo.

Ocho horas cátedra [4] para desarrollar la actividad.

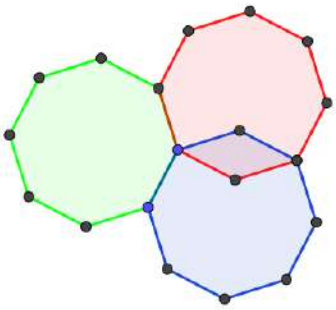
- 1ra hora: Planteo del problema, organización de los grupos de trabajo y primeros bosquejos intuitivos.
- 2da hora: Teselado con GeoGebra. Primeras justificaciones intuitivas para el mismo y debate.
- 3ra y 4ta horas: Identificación de polígonos aptos atendiendo a los ángulos (Uso de divisores de 360º).
- 5ta, 6ta y 7ma horas: Comparación de polígonos equivalentes atendiendo a su perímetro.
- 8va hora: Conclusiones, introducción de marco histórico y finalización de la actividad.

Análisis a priori.

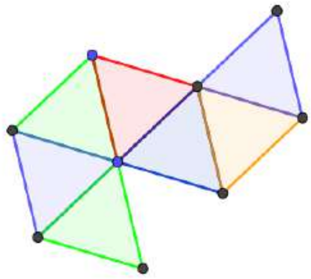
Luego de algunas pruebas con el software los estudiantes notarán que es posible teselar con el triángulo y el cuadrado, pero no con el pentágono.

[4] La hora cátedra en este caso corresponden a 40 minutos de la hora reloj.

Camuyrano et al (1998) también comentan que podría ocurrir que se conjeturara que «se puede embaldosar cuando el polígono tiene una cantidad par de lados» (siendo el triángulo una excepción). Sería cuestión que prueben con el octógono para que la conjetura pierda validez. Con la herramienta «Polígono Regular» del panel principal de GeoGebra se pueden generar las teselaciones pues, de construirlas a mano, la atención se posaría en «hacer un buen gráfico» y no en las relaciones que se pueden establecer (Criterio de Imprescindibilidad).



Teselado (imposible) con octógonos



Teselado con Triángulos.

Si los estudiantes no se dan cuenta que todo dependerá de la amplitud de los ángulos interiores del polígono, conviene que el docente intervenga orientando. Es importante que el curso haya tenido un acercamiento previo a GeoGebra, a fin de que el trabajo sea matemático y no una clase tutorial sobre el software (para *No perder de vista el objeto matemático*).

Hasta esta parte, el **registro geométrico** ha sido el protagonista. Si los estudiantes saben que la suma de ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a $180 \cdot (n-2)$ puede llevarse el problema a un terreno **aritmético y algebraico**, intentando probar qué valores de n permiten embaldosar. Trabajar con los divisores naturales de 360 es una alternativa para encontrar los valores de n tales que $\frac{180 \cdot (n-2)}{n}$ es divisor de 360. Los divisores de 360 son: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360$

$360 = k \cdot \frac{180 \cdot (n-2)}{n}, k \wedge n \in \mathbb{N}$ Descartando $k = 1$ y $k = 2$ (y por lo tanto también $k = 360$ y $k = 180$) y $k > 8$ ya que no tiene sentido (¿por qué?), se empieza a probar con todos los divisores restantes. Luego de 4 operaciones queda de manifiesto que dan soluciones naturales $k = 3$ ($k = 120$), $k = 4$ ($k = 90$) y $k = 6$ ($k = 60$). El universo de los polígonos regulares ahora se redujo a tres, con lo que se puede hacer un análisis pormenorizado de cada uno. Es necesario trabajar con polígonos equivalentes [5]. Para este caso se toma el área unidad. Se busca entonces el polígono que permita trabajar menos tiempo en el cortado de las «baldosas vinílicas».

- **Para el triángulo equilátero**:

  Este es un buen momento para recordar con los estudiantes la fórmula de área de un triángulo, utilizando trigonometría: $A = a \cdot b \sin C$ siendo a, b y c lados del triángulo y A,B y C sus ángulos interiores.

  Si los estudiantes no la conocen, puede usarse y luego iniciar una búsqueda de justificaciones para la misma (que quedará a criterio del docente).

  Entonces, para este caso: $1 = L^2 \sin 60^o$de lo que se obtiene que el lado del triángulo es $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Luego el valor del perímetro es $\frac{6}{\sqrt[4]{3}}$.

- **Para el Cuadrado**:

  Sólo basta recordar que el área para el cuadrado es $A = L^2 \Rightarrow 1 = L^2 \Rightarrow L = 1$ lo que permite decir que el perímetro es igual a 4 unidades.

- **Para el Hexágono Regular**:

  La división en seis triángulos equiláteros permite decir que el área de cada uno de ellos es $\frac{1}{6}$. Luego, razonando como lo hicimos anteriormente:$\frac{1}{6} = L^2 \sin 60^o \Rightarrow$ $\sqrt{\frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$ lo que permite deducir que el perímetro es $6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$

Lo que deja al hexágono mejor posicionado que al resto de los candidatos regulares.

Aún cuando los estudiantes no tengan un manejo hábil de cantidades irracionales exactas o del cálculo de áreas, es posible llevar adelante este trabajo. GeoGebra calcula

[5] Polígonos equivalentes: tiene el mismo valor de área aunque no necesariamente la misma forma.

automáticamente las áreas de los polígonos construídos y también la longitud del lado. Así se vuelve muy fácil la comparación.

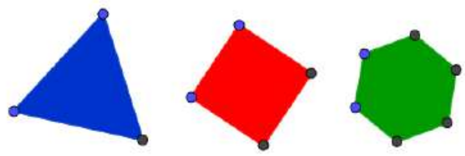
Luego de verificar que el hexágono optimiza el tiempo de cortado el docente introducirá una breve reseña histórica de la conjetura del panal. Como dice De Guzman, citado por Ochoviet, Dalcin, Martínez & Olave (2011): «la perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores».

Polígono	*Área*	*Perímetro*
Triángulo equilátero	1	$\frac{6}{\sqrt[4]{3}} \approx 4.55$
Cuadrado	1	4
Hexágono regular	1	$6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}}} \approx 3.72$

Fuente: www.gaussianos.com

Un poco de historia.

En la web de Gaussianos se encuentra un artículo que dice lo siguiente: «En la actualidad se sabe que el rellenado mínimo se consigue con hexágonos regulares. Parece que esta cuestión proviene del siglo I a. C., en el que Marco Terencio Varrón habla sobre los hexágonos de los panales de las abejas en un libro suyo de agricultura. Pero en realidad el problema ha pasado a la historia relacionado con Pappus de Alejandría, que lo cita en su Libro V (unos 400 años después), como la conjetura del panal. Y eso fue, una conjetura, durante muchísimos años, hasta el siglo XX. En 1943, L. Fejes Tóth prueba la conjetura del panal, pero considerando como hipótesis inicial que las celdas son polígonos convexos. Y la cosa se mantuvo así unos 50 años más. En 1999, Thomas Hales publica una demostración general de la conjetura del panal en su trabajo **The honeycomb conjecture**, en el que prueba que, efectivamente, el hexágono regular es la figura más eficiente».



Triángulo equilátero, Cuadrado y Hexágono regular (Equivalentes)

¿Y las abejas?

Aparentemente, las abejas actuales lograron adaptarse, volviendo eficiente el almacenamiento de su producción. En la web www.portaleducativo.net se puede leer: «Durante toda su historia evolutiva, han dominado el arte de almacenar la mayor cantidad de miel mediante el uso de la menor cantidad de recursos. El secreto de eficiencia detrás de este nido de abeja se debe a su forma hexagonal.

La creación de la cera es un proceso bastante caro para la abeja, ya que consumen ocho onzas [6] de miel por cada onza de cera que crean. Por esta razón, se deben asegurar de que no están perdiendo recursos al crear las estructuras que albergarán el néctar y la miel. El secreto está en la geometría de las estructuras».

Tercera parte: Puesta en marcha.

La unidad didáctica fue llevada a cabo en el curso 4º del Instituto Juan Pablo II de la Ciudad de Concepción del Uruguay, en el mes de Julio del corriente año.

Como el curso estaba formado por sólo cinco estudiantes, no se constituyeron grupos.

El docente presentó el enunciado del problema a los estudiantes y pidió que pensaran alguna solución, pudiendo usar como recurso cualquiera de los útiles habituales y el software GeoGebra.

Pelota de fútbol con pentágonos y hexágonos curvos.

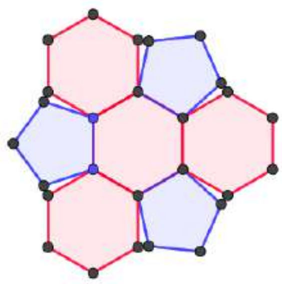
Fuente: www.shutterstock.com

Luego de releer el mismo y de mirarse unos a otros una estudiante aventuró: «deberían ser cuadrados». El docente pide argumentos para la elección, quedando la estudiante meditando un rato a la par que otros dos alumnos observan que el piso del aula (en el que están ocurriendo los acontecimientos) tiene cerámicas cuadradas.

[6] 1 onza= 28.3495 gramos.

Se inció entonces un intercambio en el que salen a la luz rectángulos y triángulos como polígonos para poder embaldosar y algunas razones para elegir tal o cuál. En principio algunos alumnos comentan que «es lo que se usa» en forma de alegato por la elección del cuadrado o el rectángulo. El profesor hace énfasis en que el adhesivo vinílico debe ser cortado eficientemente y eso involucra al tiempo como variable.
Así el «perímetro» entra en el juego. A todo esto, un estudiante, que parecía tener problemas con la aplicación para móviles de GeoGebra, muestra que había podido «pegar figuras de cinco lados». El profesor recuerda entonces el nombre pentágono y pide que verifiquen si se trata de pentágonos regulares. Así los estudiantes deciden probar, resultando imposible la teselación.
Un estudiante puso en cuestión la idea de usar «todos juntos», es decir combinar distintos polígonos. Aparece en escena el diseño de una pelota de fútbol que si bien se modeliza con una superficie, aparecen hexágonos y pentágonos (aunque curvos) en su constitución.

Rápidamente, y tal vez fruto del cansancio mental, los demás opinan que hay que ir por lo «fácil» y probar con polígonos congruentes. Al respecto es importante reconocer que al usar figuras idénticas se puede establecer un molde, con lo cual el trabajo se puede sistematizar.



Teselado (imposible) con pentágonos y hexágonos regulares

El paso siguiente involucró entender que, dentro de las figuras congruentes para usar, no existen infinitas opciones. Se hizo necesaria establecer las condiciones para identificar cuáles son las opciones posibles.
En este momento el trabajo se estanca: los chicos entienden que no se puede teselar con el pentágono y prueban inclusive con el heptágono y el octógono, pero tienen dificultad para seguir con la investigación. El docente interviene interrogando acerca de qué características tienen los polígonos con los que sí se puede teselar. «Yo iba a decir los pares pero no» comenta una estudiante marcando que cuadrado y hexágono tienen lados pares,

pero el triángulo no. El docente exhorta al grupo a observar los ángulos interiores de los polígonos. «Tiene que formar un giro» aventura otra estudiante. Entonces empieza un trabajo de búsqueda, largo por cierto, para encontrar los polígonos cuyos ángulos interiores tienen una amplitud igual a un divisor de 360. Con el docente revisando cálculos, los chicos empiezan a probar sin pensar demasiado. Así, ante el cansancio se dan cuenta que no son necesarios tantos cálculos, ya que sólo deberán probar con la mitad de los divisores.

Luego de este trabajo se concluyó que existen tres polígonos posibles para teselar: triángulo equilátero, cuadrado y hexágono regular. Para poder decidir se puso como objetivo minimizar el tiempo de cortado. Rápidamente dos estudiantes aseguraron que el triángulo es la opción óptima. Un estudiante expresa que seguro no es porque, según él, «en matemática si algo te parece fácil es que lo estás haciendo mal». Ante el mutismo del docente el grupo duda. Otro alumno dice que «por algo se usan los cuadrados» en los pisos. Al respecto el docente observa que tanto en el piso del Club Rivadavia como en la vereda del boulebard Irigoyen [7] se pueden observar hexágonos.

El docente entonces les propone que construyan tres polígonos equivalentes y que analicen el perímetro. Con la ventaja de calcular automáticamente el área de los polígonos construídos con el software, se pudo encontrar rápidamente la solución.

El docente aclara que las medidas dadas por el software no son exactas, y que para dar una medida sin error hay que trabajar con cantidades irracionales. Uno de los estudiantes opina que no es necesario, porque la diferencia que hay entre los perímetros es «bastante». No obstante, con ayuda del docente calculan en el pizarrón los valores exactos, hallando un error despreciable para el problema.

Terminada esta parte el docente comenta que existe un teorema que demuestra el resultado obtenido de forma más general y da una breve reseña histórica sobre la «Honeycomb Conjecture».

[7] ambos son lugares de Concepción del Uruguay.

Conclusiones.

Haciendo un análisis de lo acontecido durante la elaboración del presente trabajo y su posterior puesta en marcha se puede destacar que:

- El Diseño Curricular de la Provincia de Entre Ríos deja espacio para la generación de propuestas que permitan el uso de múltiples herramientas matemáticas en la resolución de un problema concreto.
- Es sumamente importante ser consciente que el elitismo en ciencia es real, y es compromiso del docente atacarlo con propuestas didácticas.
- El debate permite que los actores involucrados ejerciten el razonamiento y el uso del discurso, poniendo énfasis en los argumentos y no tanto en cuestiones emocionales.
- Los distintos registros semióticos permiten flexibilidad en la presentación de la información.
- Construir secuencias didácticas como la presente en este trabajo lleva mucho tiempo.
- Existe bibliografía con propuestas didácticas para abordar matemáticamente problemas, aunque no abunda.

El contenido abordado en los seminarios de la Especialiación en Educación Científica permitió que se generara una secuencia con un perfil que busca la intervención activa de los actores y que permita socializar el conocimiento.

En la puesta en marcha se pudo apreciar la ventaja que supone el trabajo con software dinámico, permitiendo que el trabajo se torne más analítico que algebraico. Además, si bien se produjo un estancamiento en la búsqueda de la solución, se notó motivación por parte de los estudiantes. Parece que el trabajo grupal permitió que los estudiantes compartan el deseo de arribar a una conclusión coherente con el problema planteado.

Por último reconocer que la construcción de secuencias es un trabajo difícil pero que permite la intervención de multiplicidad de conceptos, perspectivas y herramientas; lo que permite una menor fragmentación de la asignatura y colabora con una democratización del saber.

Algunas Curiosidades.

- **Los hexágonos en la literatura.**

  Jorge Luis Borges en «La biblioteca de Babel» imagina un universo (la biblioteca) constituído por cámaras hexagonales. Dentro del texto puede leerse «Los idealistas arguyen que las salas hexagonales son una forma necesaria del espacio absoluto o, por lo menos, de nuestra intuición del espacio. Razonan que es inconcebible una sala triangular o pentagonal» (Borges, 1981).

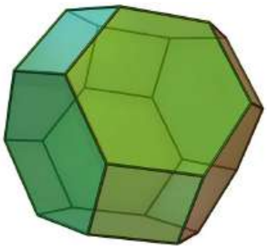
- **El material del futuro**

  En el año 2010 los científicos Andre Geim y Konstantin Novoselov de la Universidad de Manchester (Reino Unido) recibieron el Premio Nóbel de Física por sus trabajos con el **Grafeno**: material que es un « óptimo conductor eléctrico, tan eficaz como el cobre, y como conductor de calor supera a cualquier otro material conocido» (El País, 2010). Este material surge cuando pequeñísimas partículas de carbono se agrupan de forma muy densa en láminas de dos dimensiones muy finas (tienen el espesor de un átomo), respetando una disposición **hexagonal**.

- **¿Y en el espacio?**

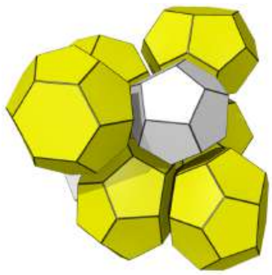
  Luego del trabajo se puede pensar que es posible que exista un cuerpo que minimice el área superficial al momento de rellenar una región del espacio. William Thompson, más conocido como Lord Kelvin, conjeturó a fines del Siglo XIX que un **Octaedro truncado** debería ser el poliedro óptimo.

  Pasó casi un siglo hasta que, en 1993, Denis Weaire y Robert Phelan en contraron un contraejemplo: Una estructura formada por dos dodecaedros irregulares con caras pentagonales y seis tetradecaedros con dos caras hexagonales y doce caras pentagonales. (Morales Medina, 2013).



Octaedro truncado.

Fuente: www.gaussianos.com



Estructura de Weaire - Phelan

Bibliografía.

Banet Hernández, E. (2010). *Finalidades de la Educación Científica en Educación Secundaria: aportaciones de la investigación educativa y opinión de los profesores.* Universidad de Murcia. https://ddd.uab.cat/record/60789.

Borges, J. (1981). *La biblioteca de Babel (Ficciones)* . Argentina: Alianza Editorial.

Camuyrano, M., Crippa, A., Déboli, A., Guzner, G., Hanfling, M., Savón, S. y otros. (1998). *Matemática. Temas de su didáctica.* PRO Ciencia CONICET.

C.G.E. Prov. De Entre Ríos. (2011) *Diseño Curricular de Educación Secundaria - Tomo II.* Paraná: Imprenta Oficial de Entre Ríos.

Chevalard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Cuaderno de educación 22. Barcelona: Editorial Horsori.

Díaz, A., Agrasar, M., Chemello, G., Chevallard, Y., Crippa, A. Novembre, A, y otros. (2011). *Enseñar Matemática en la Escuela Media.* Buenos Aires: Biblos.

Fernández, I. Gil, D. Carrascosa, J. Cachapuz, A. Praia, João. (2002). *Visiones deformadas de la Ciencia transmitidas por la enseñanza.* Enseñanza de las Ciencias 20 (3), 477-488.

Furió, C. Vilches, A. Guisasola, J. Romo, V. (2001).*Finalidades de la Enseñanza de las Ciencias en la Secundaria obligatoria; ¿Alfabetización Científica o Preparación Propedéutica?.* Enseñanza de las Ciencias, 2001, 19 (3), 365-376.

Galagovsky Kurman, L. (1993). *Hacia un nuevo rol docente. Una propuesta diferente para el trabajo en el aula.* Buenos Aires: Editorial Toquel.

Galagovsky, L. (2004). *Del Aprendizaje Significativo al Aprendizaje Sustentable. Parte 1: El Modelo Teórico.* Enseñanza de las Ciencias, 2004, 22(2), 229–240.

Gascón, J. (2003). *Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria.* Barcelona: Revista SUMA.

Hale, T. (2000). *The honeycomb conjecture.* Coronell University Library. http://lanl.arxiv.org/abs/math/9906042v2

Hayes Jacobs, H. (2014). *Curriculum XXI. Lo esencial de la educación para un mundo en cambio.* Madrid: Narcea.

Klimovsky, G. Boido, G (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático.* Argentina: A-Z editora.

Macías Sánchez, J. (2014). *Los Registros Semióticos en Matemáticas como elemento de Personalización en el aprendizaje.*UNIR. Revista de Investigación Educativa Conect@2.Año V. Número 9.

Morales Medina, M. (2013). *Gaussianos.* Pappus, Hales y Kelvin, Weaire y Phelan, o cómo rellenar el plano y el espacio de la manera más eficiente. Recuperado de https://www.gaussianos.com/pappus-hales-y-weaire-y-phelan-o-como-rellenar-el-plano-y-el-espacio-de-manera-eficiente/.

Moreira, M., Greca, I. (2003). *Cambio Conceptual: Análisis crítico y propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo.* Brasil: Ciência & Educação.

Novak, J. (1982). *Teoría y práctica de la educación.* España: Alianza Editorial.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M., Gorrochategui, M. (2011). *Los registros semióticos de representación en matemática.* Santa Fe: Revista Aula Universitaria 13.

Ochoviet, C., Dalcin, M., Martínez, A. & Olave, M. (2011). *Integrando la matemática con su historia en los procesos de enseñanza.* Montevideo: Editorial Psicolibros Waslala.

Rivera, Alicia. (2010, 6 de Octubre). Nobel de Física para el grafeno, un material revolucionario. *El País.* Recuperado de https://elpais.com/diario/2010/10/06/futuro/1286316001_85021

Rodríguez, M., Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* Buenos Aires: Ediciones UNGS.

Vera Prado, G. , González Verga,P. (2012). *Portal Educactivo.* ¿Por qué las abejas hacen sus panales hexagonales?. Recuperado de https://www.portaleducativo.net/mundo-natural/27/por-que-las-abejas-hacen-sus-panales-hexagonales.